EGZAMIN MATURALNY
MATEMATYKA
Poziom rozszerzony
ZBIÓR ZADAŃ

Materiały pomocnicze dla uczniów i nauczycieli

Centralna Komisja Egzaminacyjna
2015

1. Zadania

1.1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne. Równania i nierówności

Zadanie 1.

Dane jest równanie kwadratowe $x^2 + kx + 2k - 3 = 0$, gdzie $k \in R$. Dla jakich wartości parametru k to równanie ma dwa różne pierwiastki ujemne?

Komentarz do zadania

Kiedy równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki? Co powiesz o znaku sumy i iloczynu pierwiastków, jeśli są one ujemne? Możesz skorzystać ze wzorów Viète'a. Rozwiąż otrzymane nierówności. Wyznacz część wspólną zbiorów rozwiązań.

Przykładowe rozwiązanie

Niech liczby x_1 i x_2 będą rozwiązaniami równania kwadratowego $x^2 + kx + 2k - 3 = 0$.

Ustalimy, dla jakich wartości parametru k równanie ma dwa rozwiązania, które są liczbami ujemnymi.

Równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania, gdy $k^2 - 4(2k - 3) > 0$.

$$k^2 - 4(2k - 3) > 0,$$

$$k^2 - 8k + 12 > 0,$$

$$k_1 = \frac{8-4}{2} = 2, \quad k_2 = \frac{8+4}{2} = 6,$$

$$k \in (-\infty; 2) \cup (6; \infty).$$

Wyznaczymy teraz, dla jakich wartości k rozwiązania równania x_1 i x_2 są ujemne.

Wiemy, że x_1 i x_2 będą ujemne, gdy

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$$

Korzystając ze wzorów Viète'a, mamy

$$\begin{cases} 2k - 3 > 0 \\ -k < 0 \end{cases}$$

Tak więc $k > 1\frac{1}{2}$ i $k > 0$.

Z powyższego mamy $k \in \left(1\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Rozważane równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania ujemne dla k spełniających następujące warunki:

$$k \in (-\infty; 2) \cup (6; \infty) \quad \text{i} \quad k \in \left(1\frac{1}{2}; \infty\right).$$

Tak więc równanie ma dwa różne rozwiązania ujemne dla

$$k \in \left(1\frac{1}{2}; 2\right) \cup (6; \infty).$$

Zadanie 2.

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x-2$ jest równa 2. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x-1)$ przez $x-3$.

Komentarz do zadania

Nazwa zmiennej nie ma znaczenia; możesz myśleć o dzieleniu $W(t)$ przez $t-2$ zamiast $W(x)$ przez $x-2$. Co otrzymasz, podstawiając teraz $x-1$ zamiast t?

Jeśli jeszcze tego nie widzisz, prześledź krok po kroku następujące rozumowanie: Gdy dzielisz np. liczbę 17 przez 5, to otrzymujesz iloraz 3 i resztę 2. Możesz więc napisać, że $17 = 3 \cdot 5 + 2$. Podobne zasady dotyczą dzielenia wielomianów. Zapisz wielomian W w postaci sumy iloczynu dzielnika $x-2$ przez iloraz oraz reszty. Nie musisz znać otrzymanego ilorazu — zamiast tego napisz np. $P(x)$. W zadaniu jest mowa o wartości wielomianu W dla argumentu $x-1$, pozostaje więc w miejsce zmiennej, w zapisanej wcześniej sumie, wstawić $x-1$.

Przykładowe rozwiązanie

Zauważmy, że istnieje taki wielomian $P(x)$, że $W(x) = (x-2) \cdot P(x) + 2$.

Ale wówczas $W(x-1) = [(x-1)-2] \cdot P(x-1) + 2$, czyli $W(x-1) = (x-3) \cdot P(x-1) + 2$.

Stąd widać, że szukana reszta jest równa 2.

Zadanie 3.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y takich, że $|x| \neq |y|$, prawdziwa jest nierówność $\dfrac{(x-y)(x^3+y^3)}{(x+y)(x^3-y^3)} > \dfrac{1}{3}$.

Komentarz do zadania

Skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia na sumę sześcianów i na różnicę sześcianów i skróć ułamek występujący po lewej stronie dowodzonej nierówności.

Przekształć teraz otrzymaną nierówność tak, żeby otrzymać nierówność kwadratową.

Skorzystaj na koniec ze wzoru na kwadrat różnicy i wyciągnij odpowiedni wniosek. W którym miejscu wykorzystasz informację, że liczby x i y są różne?

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których pierwiastkami równania $\left(x^2-1\right)\left(x^2-m^2\right)=0$ są cztery kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego.

Komentarz do zadania

Czy dla $m=0$ warunki zadania byłyby spełnione? Ile wówczas mielibyśmy rozwiązań?

Zauważ, że rozwiązaniami każdego z równań $x^2-1=0$ oraz $x^2-m^2=0$ są pary liczb przeciwnych. Jakie to liczby? Jakie może być wzajemne położenie tych liczb na osi liczbowej? Dlaczego nie jest możliwe wzajemne położenie opisane nierównościami $-m<-1<m<1$?

Jak możesz skorzystać z definicji ciągu arytmetycznego dla ciągu $(m,-1,1,m)$, a jak dla ciągu $(-1,-m,m,1)$?

Zauważ, że jeśli rozwiązaniem zadania będzie liczba *m*, to będzie nią także liczba $-m$, bowiem w równaniu mamy wyrażenie m^2, a $m^2=(-m)^2$.

Zadanie 5.

Liczba $\log_4 9+\log_2 6$ jest równa

A. $\log_2 18$ B. $\log_2 27$ C. $\log_4 27$ D. $\log_4 108$

Zadanie 6.

Wykaż, że $\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2=1$.

Zadanie 7.

Liczba $\left(2^7\right)^{\log_2 7}$ jest równa

A. 7^1 B. 7^2 C. 7^7 D. 7^{14}

Zadanie 8.

Iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest 6 razy większy od kwadratu najmniejszej z tych liczb powiększonego o 1. Wyznacz te liczby.

Zadanie 9.

Liczby rzeczywiste *a, b, c* są pierwiastkami wielomianu x^3-2x+1. Oblicz, ile jest równe $a^2+b^2+c^2$.

Zadanie 10.

Wyznacz wszystkie wartości parametru *k*, dla których równanie $k^2x-1=x(3k-2)-k$ ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zadanie 11.

Równanie $||x+3|-4|=5$

A. nie ma rozwiązań rzeczywistych.
B. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.
C. ma dokładnie trzy rozwiązania rzeczywiste.
D. ma dokładnie cztery rozwiązania rzeczywiste.

Zadanie 12.

Rozwiąż równanie $||x-1|-1|=|x-2|$.

Zadanie 13.

Rozwiąż nierówność $|2x-2|-|x|\geq x$.

Zadanie 14.

Uzasadnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $|x+5|+|x-2|\geq 7$.

Zadanie 15.

Rozwiązaniami nierówności $|x^2-4|<|x-2|$ są wszystkie liczby ze zbioru

A. $(-2, 2)$
B. $(-3, -1)$
C. $(-\infty, -2)\cup(2, +\infty)$
D. $(-\infty, -3)\cup(-1, +\infty)$

Zadanie 16.

Równanie kwadratowe $5x^2+4x-3=0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste: x_1 oraz x_2. Wartość wyrażenia $\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$ jest równa

A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{4}$

Zadanie 17.

Równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$, gdzie $c\neq 0$, ma dwa różne pierwiastki, których suma jest równa ich podwojonemu iloczynowi. Wynika stąd, że

A. $b=2c$ B. $c=2b$ C. $b=-2c$ D. $2b=-c$

Zadanie 18.

Określ liczbę rozwiązań równania $mx^2 + mx - 1 - 2m = 0$, gdzie $x \in \langle -2, 2\rangle$, w zależności od wartości parametru $m \in R$.

Zadanie 19.

Funkcja f, której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, określona jest wzorem $f(x) = (m-1)x^2 - 2x - m + 1$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wykres funkcji f przecina się z prostą o równaniu $y = -x + 1$ w dwóch punktach, których pierwsze współrzędne mają przeciwne znaki.

Zadanie 20.

Trójmian $x^2 + bx + c$ ma dwa różne pierwiastki całkowite, oba różne od zera, a suma jego współczynników $1 + b + c$ jest liczbą pierwszą. Wskaż przykład trójmianu spełniającego warunki zadania. Uzasadnij, że jednym z pierwiastków tego trójmianu jest liczba 2.

Zadanie 21.

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność $8x^2 - 4mx + 2m^2 \geq 12x + 6m - 18$.

Zadanie 22.

Wielomian f jest dany wzorem $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x - a$. Reszta z dzielenia wielomianu f przez dwumian $x - 2$ jest równa 3, gdy a jest równe

A. 12 B. 17 C. 19 D. 22

Zadanie 23.

Dla pewnej wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 8x^8 + 6x^6 + 4x^4 + 2x^2 + m$ przez $x - 2$ jest równa 2014. Reszta z dzielenia wielomianu W przez $2x + 4$ jest równa

A. -2014 B. -1007 C. 2014 D. 4028

Zadanie 24.

Wielomian $W(x) = 4x^5 + ax^3 + bx^2 + 1$ jest podzielny przez dwumian $2x + 1$, a reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x - 2$ jest równa 105. Wyznacz pierwiastki wielomianu W.

Zadanie 25.

Rozwiąż równanie $3\left(x + \sqrt{2}\right) = x^3 + 2\sqrt{2}$.

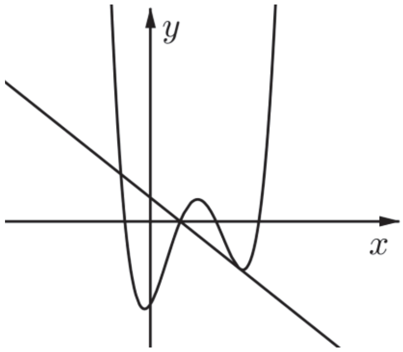
Wskazówka: możesz skorzystać ze wzoru $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$.

Zadanie 26.

Rozwiąż równanie $\left(x^2-3x\right)\left(x^2-3x+2\right)+1=0$.

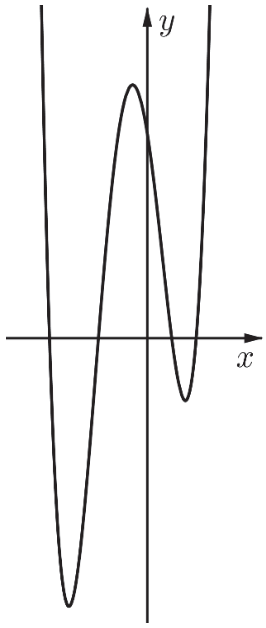
Zadanie 27.

Na rysunku poniżej przedstawiono fragment wykresu funkcji liniowej $f(x)=-2x+2$ oraz fragment wykresu wielomianu $w(x)=x^4-6x^3+8x^2+4x-7$. Rozwiąż nierówność $w(x)\geq f(x)$.



Zadanie 28.

Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu wielomianu $W(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{2}x^3-4x^2-6x+8$. Wielomian W jest podzielny przez dwumian $\frac{1}{2}x+2$. Rozwiąż nierówność $W(x+2)\geq 0$.



Zadanie 29.

Dane są funkcje $f(k)=k^3$ oraz $g(k)=2\cdot f(k)-f(k-2)$, gdzie $k\in R$. Wyznacz wartości k, dla których $g(k)=80$.

Zadanie 30.

Funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2+bx-6$ osiąga najmniejszą wartość równą -22 dla argumentu 4. Liczba -3 jest jednym z rozwiązań równania $x^3+ax^2+bx-6=0$. Wyznacz pozostałe rozwiązania tego równania.

1.2. Funkcje

Zadanie 31.

Funkcja kwadratowa $f(x) = -x^2 + (1-m)x + m + 3$ osiąga wartość największą dla tego samego argumentu, dla którego wartość najmniejszą osiąga funkcja kwadratowa $g(x) = -(m+1)x^2 + (2m-2)x - 4m$. Uzasadnij, że dla dowolnej wartości argumentu prawdziwa jest nierówność $f(x) \le g(x)$.

Komentarz do zadania

Dla jakiej wartości argumentu funkcja kwadratowa osiąga wartość najmniejszą (największą)? Wyznacz te wartości dla każdej z funkcji i przyrównaj do siebie otrzymane wyrażenia. Sprawdź, czy dla każdej z otrzymanych wartości parametru spełnione są warunki zadania. Uwzględniając wyznaczone *m*, napisz wzory obu funkcji w postaci kanonicznej lub rozwiąż odpowiednią nierówność.

Przykładowe rozwiązanie

Niech punkt $W_f = (x_f, y_f)$ będzie wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej *f*. Wtedy $x_f = \frac{1-m}{2}$.

Analogicznie, niech punkt $W_g = (x_g, y_g)$ będzie wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej *g*. Wtedy $x_g = \frac{2(m-1)}{2(m+1)} = \frac{m-1}{m+1}$. Oczywiście, ponieważ funkcja g jest kwadratowa, musi zachodzić warunek $m \ne -1$.

Z warunków zadania wynika, że $x_g = x_f$, zatem $\frac{1-m}{2} = \frac{m-1}{m+1}$.

Ostatnie równanie można zapisać w postaci równoważnej $1 - m^2 = 2(m-1)$, czyli

$$(m-1)(m+3) = 0.$$

Jego rozwiązaniami są liczby 1 oraz -3.

Zauważmy, że dla $m = 1$ funkcja *g* byłaby określona wzorem $g(x) = -2x^2 - 4$, tym samym nie miałaby wartości najmniejszej.

Z kolei dla $m = -3$ otrzymujemy:

$$f(x) = -x^2 + 4x,$$

$$g(x) = 2x^2 - 8x + 12.$$

Zapisując otrzymane trójmiany w postaci kanonicznej, otrzymujemy:

$$f(x) = -(x-2)^2 + 4,$$

$$g(x) = 2(x-2)^2 + 4.$$

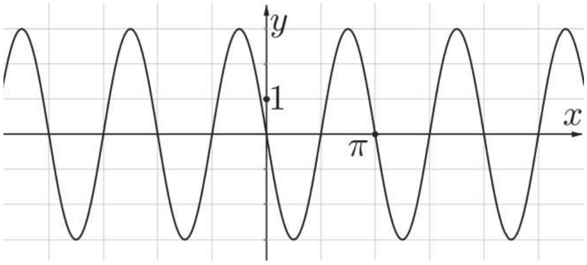
Stąd $f(x) \le g(x)$ dla każdej wartości x.

Uwaga: Oczywiście $g(x) - f(x) = 3 \cdot (x-2)^2 \ge 0$, co oznacza, że $g(x) \ge f(x)$.

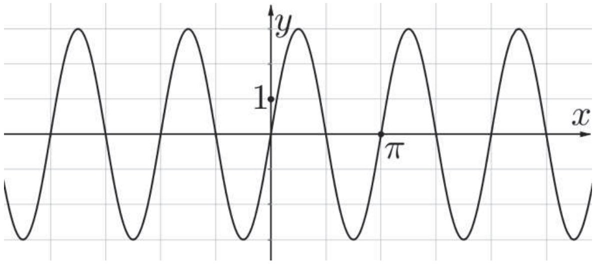
Zadanie 32.

Funkcja f, której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, jest określona wzorem $f(x) = 2\sin(-3x)$. Na którym rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji f?

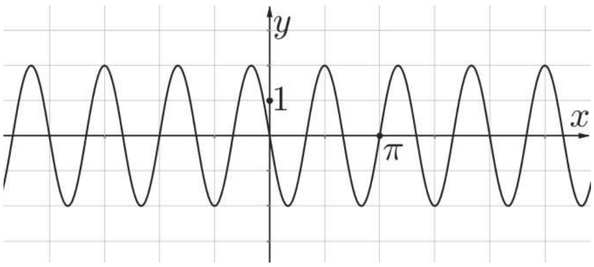
A.



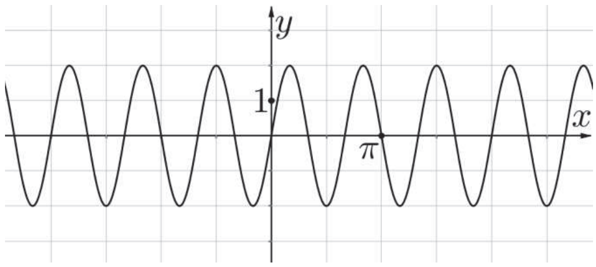
B.



C.



D.



Komentarz do zadania

Zauważ, że zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -2;2\rangle$. Które z przedstawionych fragmentów wykresów funkcji możesz odrzucić? Następnie sprawdź, jakie wartości (dodatnie czy ujemne) funkcja f przyjmuje w otoczeniu zera.

Możesz też obliczyć wartość $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 2$. Na którym rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji spełniającej ten warunek?

Poprawna odpowiedź

C

Zadanie 33.

Wyznacz, w zależności od całkowitych wartości parametru $a > 0$, liczbę różnych rozwiązań równania $\sin(\pi a x) = 1$ w przedziale $\left\langle 0, \frac{1}{a}\right\rangle$.

Komentarz do zadania

Najpierw musisz ustalić, dla jakich wartości argumentu α prawdziwe jest równanie $\sin\alpha = 1$. Pamiętaj o okresowości funkcji sinus — musisz zapisać cała serię rozwiązań, z uwzględnieniem krotności okresu, czyli wyrażenia $2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Teraz podstaw w miejsce α argument równania, które chcesz rozwiązać, czyli $\pi a x$, a następnie, odpowiednio dzieląc, wyznacz zmienną x.

Sprawdź, że dla $k = 0$ otrzymana wartość zmiennej x leży w przedziale $\left\langle 0, \frac{1}{a} \right\rangle$.

Zauważ, że dla $k < 0$ otrzymana wartość zmiennej x jest ujemna, czyli nie może należeć do przedziału $\left\langle 0, \frac{1}{a} \right\rangle$. Podobnie dla $k > 0$ nie są spełnione warunki zadania.

Zadanie 34.

Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę x spełniającą warunki: $\sin x + \sin 3x = 0$ oraz $\cos\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}$.

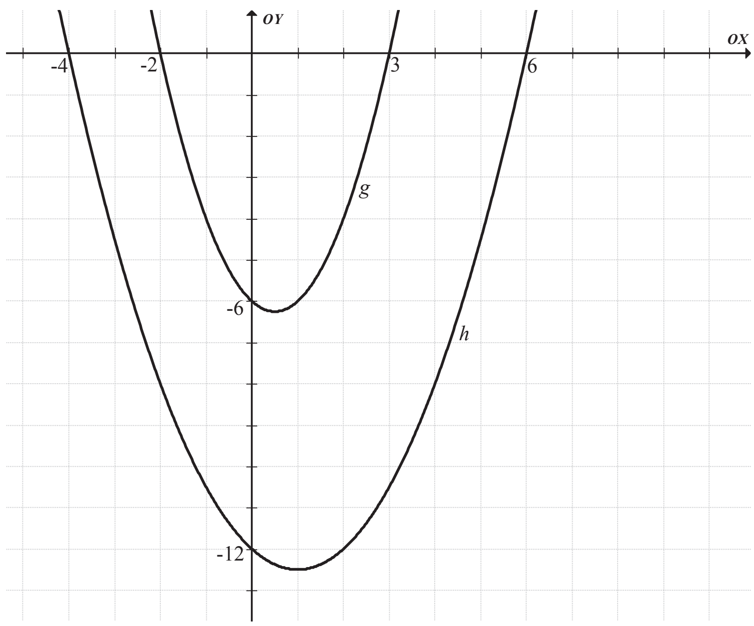
Komentarz do zadania

Korzystając ze wzoru na sumę sinusów, rozwiąż podane równanie (otrzymasz dwa prostsze równania). Wśród otrzymanych rozwiązań poszukaj najmniejszej liczby dodatniej. Sprawdź, czy spełnia ona podaną nierówność. Jeśli nie, zrób to samo z następnym dodatnim rozwiązaniem równania. Czynność tę powtarzaj tak długo, aż trafisz na liczbę, która spełnia również podaną nierówność.

Możesz też rozwiązać daną nierówność i sprawdzić, jaka najmniejsza liczba dodatnia spełniająca równanie należy do zbioru rozwiązań nierówności.

Zadanie 35.

Dla danej funkcji kwadratowej f określono funkcje g i h wzorami: $g(x) = k \cdot f(x)$ oraz $h(x) = f(kx)$, gdzie $k \neq 0$. Wyznacz wzór funkcji $f(x)$, mając dane wykresy funkcji g i h.



Zadanie 36.

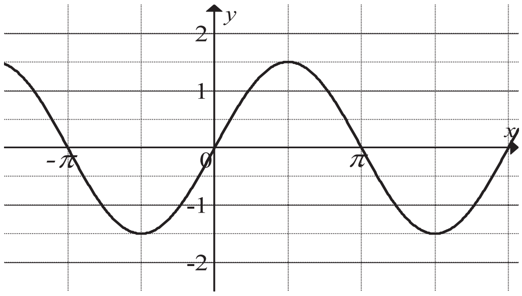
Wykaż, że

$$\frac{1 + 2\cos 88° \cdot \cos 2°}{\cos^2 2° - \cos 88° \cdot \sin 2°} = \frac{1 + \mathrm{tg}\, 2°}{1 - \mathrm{tg}\, 2°}.$$

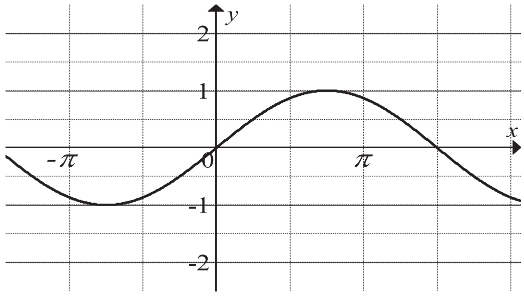
Zadanie 37.

Na którym z poniższych rysunków jest przedstawiony fragment wykresu funkcji f określonej dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$?

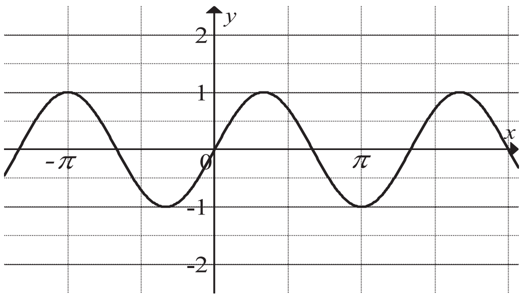
A.



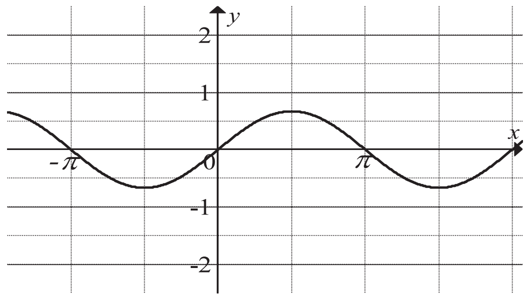
B.



C.



D.



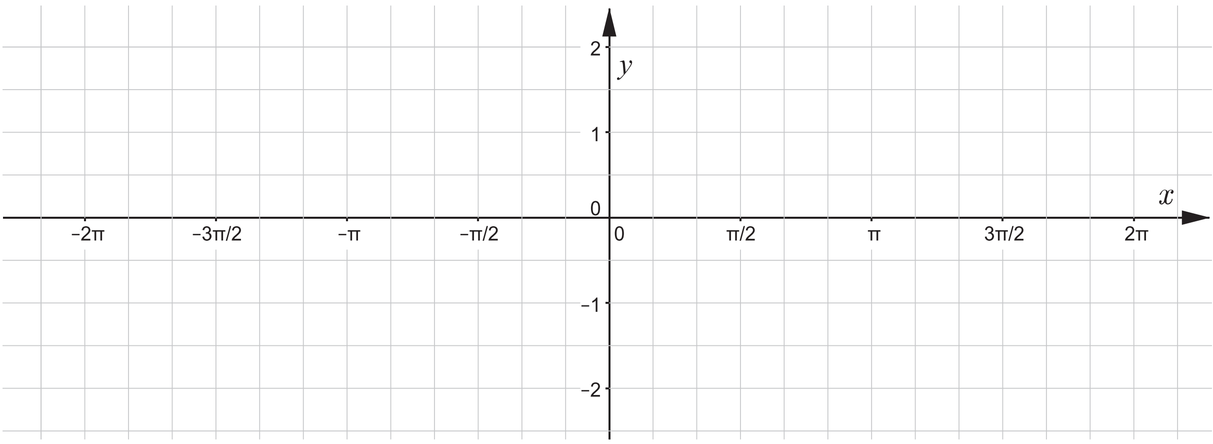
Zadanie 38.

Dane są liczby: $a=\sin\left(32\frac{1}{3}\cdot\pi\right)$, $b=\cos\left(32\frac{1}{3}\cdot\pi\right)$, $c=\mathrm{tg}\left(32\frac{1}{3}\cdot\pi\right)$. Wówczas

A. $a<b$ B. $a=b$ C. $b<c$ D. $b=c$

Zadanie 39.

Dana jest funkcja $f(x)=\cos x$ oraz funkcja $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)$. Rozwiąż graficznie i algebraicznie równanie $f(x)=g(x)$.



Zadanie 40.

Rozwiąż równanie $\sin 2x + 2\sin x + \cos x + 1 = 0$, dla $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Zadanie 41.

Wyznacz wszystkie wartości parametru $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$, dla których równanie $(x^2 - \sin 2\alpha)(x-1) = 0$ ma trzy rozwiązania.

Zadanie 42.

Rozwiąż nierówność $\cos 2x < \cos x$.

Zadanie 43.

Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których równanie $(\cos x + a)\cdot(\sin^2 x - a) = 0$ ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ dokładnie trzy różne rozwiązania.

1.3. Ciągi

Zadanie 44.

Funkcja f, której dziedziną jest zbiór $(1, +\infty)$, jest określona wzorem

$$f(x) = x + 1 + \frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x^2} + \frac{x+1}{x^3} + \ldots .$$

Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 6.

Komentarz do zadania

Wyrażenie $x + 1 + \frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x^2} + \frac{x+1}{x^3} + \ldots$ w podanym przedziale jest szeregiem geometrycznym zbieżnym. Skorzystaj z odpowiedniego wzoru, by zapisać jego sumę. Dla jakich x jest ona równa 6? Nie zapomnij sprawdzić, czy otrzymane liczby należą do dziedziny.

Przykładowe rozwiązanie

Dla $x \in (1; +\infty)$ wyrażenie $x + 1 + \frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x^2} + \frac{x+1}{x^3} + \ldots$ jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{x}$ takim, że $|q| < 1$, zatem

$$x + 1 + \frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x^2} + \frac{x+1}{x^3} + \ldots = \frac{x+1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x^2 + x}{x - 1}.$$

Z tego wynika, że $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$ dla $x \in (1; +\infty)$.

Wyznaczamy argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 6 :

$$\frac{x^2+x}{x-1}=6,$$
$$x^2+x=6x-6,$$
$$x^2-5x+6=0,$$
$$x=2 \text{ lub } x=3.$$

Argumenty $x=2$ oraz $x=3$ należą do $(1;+\infty)$.

Funkcja f przyjmuje wartość 6 dla argumentów 2 i 3.

Zadanie 45.

Ciąg geometryczny (a_n) spełnia następujące równanie rekurencyjne: $a_1=7$, $a_{n+2}=\frac{1}{6}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$, dla $n\in\{1,2,3,...\}$. Wyznacz sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n).

Komentarz do zadania

Dany ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym. Napisz wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu geometrycznego, zastosuj odpowiednio tę zależność w równaniu rekurencyjnym i przekształć to równanie do najprostszej postaci (czy iloraz q może być równy 0?). Rozwiąż równanie i wyznacz q. Pamiętając o sprawdzeniu warunku zbieżności szeregu geometrycznego, oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (dla obu przypadków).

Zadanie 46.

Ciągi (a_n) i (b_n) są dane następującymi wzorami: $a_n=\frac{n^2}{n+1}$, $b_n=\frac{3}{4n^2+2n}$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej n. Oblicz granicę ciągu (c_n) takiego, że $c_n=a_n\cdot b_n$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej n.

Komentarz do zadania

Zauważ, że ciąg (a_n) nie ma skończonej granicy (a ciąg (b_n) jest zbieżny do 0), nie możemy więc zastosować twierdzenia o granicy iloczynu. Znajdź ogólną postać wyrazów ciągu (c_n) i podziel licznik i mianownik przez odpowiednią potęgę n.

Zadanie 47.

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3n}{n^2+2}-\frac{n^2+7n}{n+21}\right)$.

Zadanie 48.

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-n^2}{n^2+1}-\frac{n^2}{n+3}\right)$.

Zadanie 49.

Pierwszy wyraz a_1 nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $\sqrt{2}$, natomiast suma pierwszych trzech jego wyrazów jest równa $\frac{7}{4}\sqrt{2}$. Szereg nieskończony $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny. Oblicz jego sumę.

Zadanie 50.

Dany jest nieskończony ciąg sześcianów. Krawędź pierwszego z nich jest równa x_1. Krawędź drugiego z tych sześcianów ma długość x_2 równą różnicy długości przekątnej pierwszego sześcianu i przekątnej ściany pierwszego sześcianu. Analogicznie trzeci sześcian ma krawędź x_3 o długości równej różnicy długości przekątnej drugiego sześcianu i przekątnej ściany drugiego sześcianu, itd. Oblicz sumę $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$.

1.4. Geometria

Zadanie 51.

Trójkąt o boku *a* i kącie ostrym α, leżącym naprzeciw tego boku, jest wpisany w okrąg o promieniu *R*, zaś trójkąt o boku $a+1$ i kącie ostrym α, leżącym naprzeciw tego boku, jest wpisany w okrąg o promieniu $R+1$. Wyznacz miarę kąta α .

Komentarz do zadania

Skorzystaj z twierdzenia sinusów dla każdego z dwóch opisanych trójkątów i zapisz dwie równości, które wiążą *a*, *R* oraz sinus kąta α . Wyznacz np. z jednej z nich zmienną *a* i podstaw do drugiej zależności. Pozwoli ci to obliczyć wartość funkcji sinus.

Przykładowe rozwiązanie

Z twierdzenia sinusów mamy odpowiednio:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R, \tag{1}$$

$$\frac{a+1}{\sin\alpha} = 2(R+1). \tag{2}$$

Z równania (1) otrzymujemy, że $a = 2R\sin\alpha$. Po podstawieniu do (2) i równoważnym przekształceniu otrzymujemy:

$$\frac{2R\sin\alpha + 1}{\sin\alpha} = 2(R+1),$$

$$2R + \frac{1}{\sin\alpha} = 2R + 2,$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} = 2,$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

Zatem $\alpha = 30^\circ$.

Zadanie 52.

Trójkąt równoramienny ABC jest wpisany w okrąg o równaniu $(x-5)^2+(y+3)^2=5$. Podstawą trójkąta ABC jest odcinek AB zawarty w prostej o równaniu $x-y-7=0$. Oblicz pole trójkąta ABC. Rozważ wszystkie przypadki.

Komentarz do zadania

Z podanego w zadaniu równania okręgu odczytaj promień R oraz środek S tego okręgu. Analizując treść zadania, możesz wykonać odpowiedni rysunek. Czy będzie tylko jeden trójkąt spełniający warunki zadania?

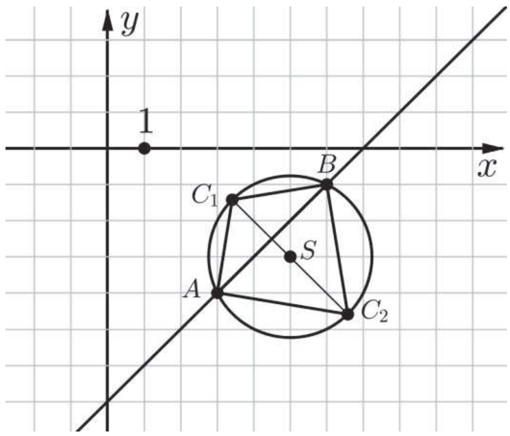
Oblicz odległość d środka S od podanej prostej. Na rysunku znajdź trójkąt prostokątny, którego bokami będą: wyznaczona odległość d, promień okręgu R i połowa odcinka AB (stanowi on podstawę trójkąta ABC). Oblicz długość odcinka AB.

Do obliczenia pola trójkąta ABC potrzebna jest jeszcze jego wysokość. Możesz ją obliczyć, wykorzystując d i R.

Przykładowe rozwiązanie

Środkiem okręgu $(x-5)^2+(y+3)^2=5$ jest punkt $S=(5,-3)$, natomiast promień $R=\sqrt{5}$.

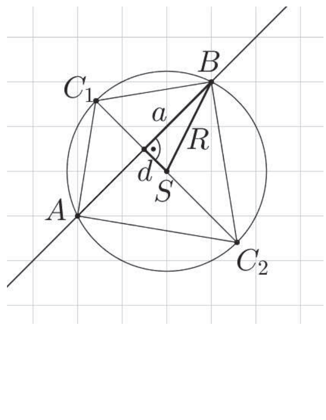
W okrąg można wpisać dwa trójkąty równoramienne ABC_1 i ABC_2, których podstawą jest odcinek AB (zobacz rysunek).



Obliczamy odległość d środka S od prostej o równaniu $x-y-7=0$:

$$d=\frac{|5+3-7|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Oznaczmy przez $a=\frac{1}{2}|AB|$ (zobacz rysunek obok).



Z twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać:

$$a^2+d^2=R^2.$$

Zatem $a=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, czyli $|AB|=3\sqrt{2}$.

Uwaga

Długość odcinka AB możemy też obliczyć, wyznaczając najpierw współrzędne punktów przecięcia danej prostej i okręgu. Wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y+3)^2=5\\ y=x-7\end{cases}$$

Wysokość trójkąta ABC_1 poprowadzona z wierzchołka C_1 jest równa

$$h_1=R-d=\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wysokość trójkąta ABC_2 poprowadzona z wierzchołka C_2 jest równa

$$h_2=R+d=\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Z tego wynika, że pole trójkąta ABC_1:

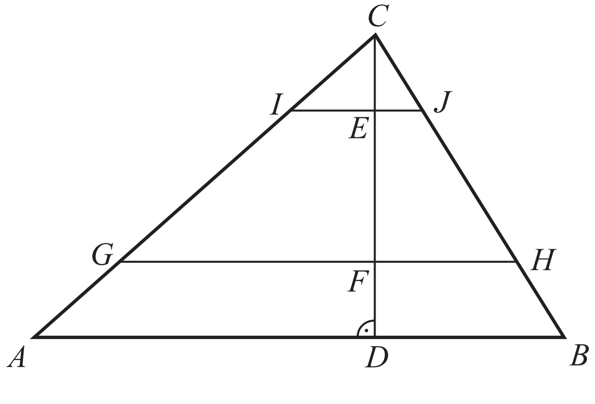
$$P_1=\frac{\left(\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{10}-3}{2}$$

oraz pole trójkąta ABC_2:

$$P_2=\frac{\left(\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{10}+3}{2}.$$

Zadanie 53.

Dany jest trójkąt ABC o polu równym P. Odcinki IJ i GH, których końce leżą na bokach trójkąta, są równoległe do boku AB i przecinają wysokość CD w punktach E i F takich, że $|CE|=|DF|=\frac{1}{4}\cdot|CD|$ (zobacz rysunek).



Pole trapezu $GHJI$ jest równe

A. $\frac{1}{2}P$ B. $\frac{9}{16}P$ C. $\frac{2}{3}P$ D. $\frac{3}{4}P$

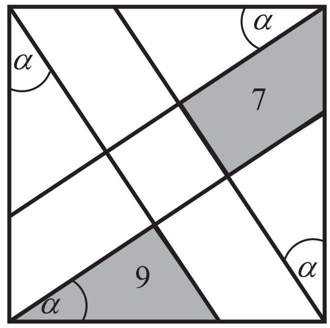
Komentarz do zadania

Zwróć uwagę, że trójkąty *IJC*, *GHC*, *ABC* są podobne. Wyznacz skalę podobieństwa trójkąta *IJC* do trójkąta *ABC* oraz skalę podobieństwa trójkąta *GHC* do trójkąta *ABC*, a następnie wykorzystaj to do ustalenia stosunku pól tych trójkątów.

Pole trapezu jest różnicą pola trójkąta *GHC* i pola trójkąta *IJC*.

Zadanie 54.

Z wierzchołów kwadratu poprowadzono do odpowiednich boków proste pod takim samym kątem α, mniejszym od 45°, (zobacz rysunek obok). Proste te wyznaczają w szczególności trójkąt (zacieniowany) o polu 9 i czworokąt (zacieniowany) o polu 7. Wyznacz pole kwadratu.



Komentarz do zadania

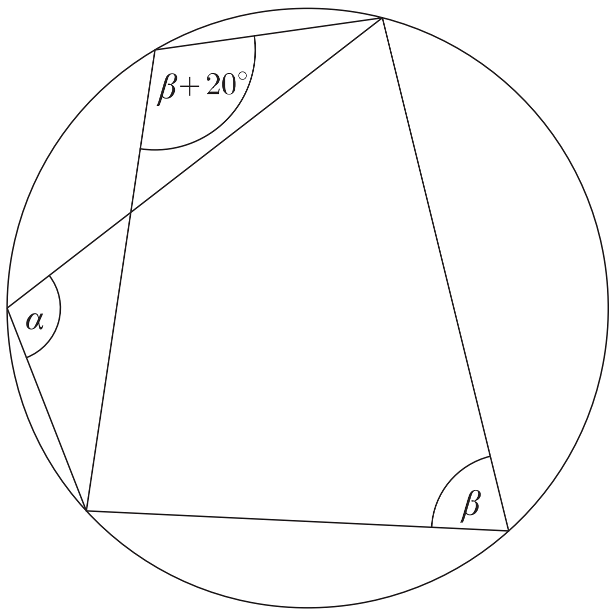
„Dołącz" do zacieniowanego trójkąta trapez „po prawej stronie".
Jakie będzie pole otrzymanego trójkąta? Ile będzie równy stosunek pól otrzymanego trójkąta i trójkąta zacieniowanego?

Czy widzisz, że te trójkąty są podobne? Ile jest równa skala podobieństwa tych trójkątów? (Pamiętaj, że stosunek odpowiednich pól jest równy kwadratowi skali podobieństwa). Wyraź podstawę zacieniowanego trójkąta jako ułamek boku kwadratu.

„Dołącz" teraz do otrzymanego trójkąta „mały" trójkąt po prawej stronie i oblicz pole otrzymanej figury. Jak wyrazisz to pole poprzez długości odpowiednich podstaw wcześniej rozważanych trójkątów?

Zadanie 55.

Wartość wyrażenia $\sin(2\alpha - \beta)$ jest równa



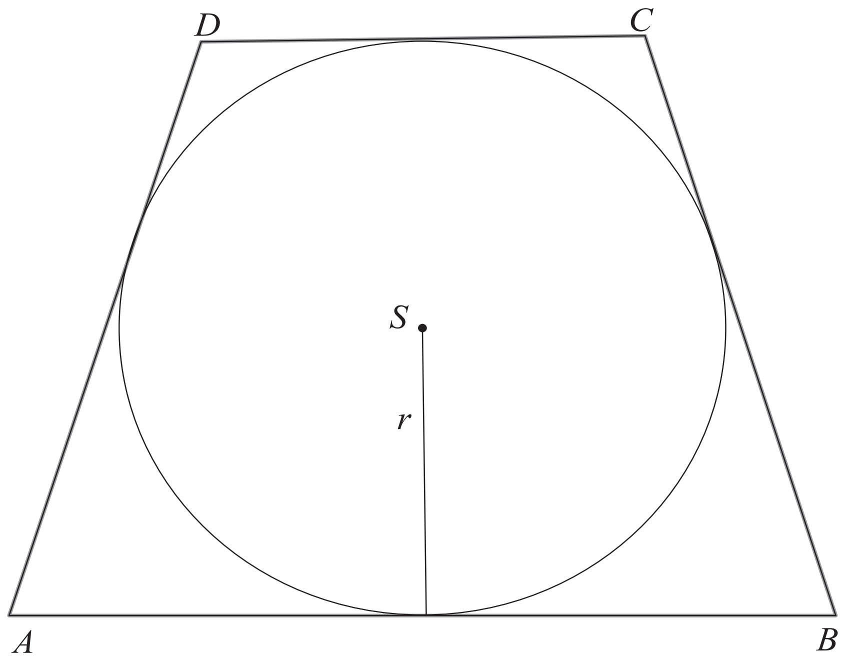
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

Zadanie 56.

W trójkącie ABC są dane $|AB| = 8$, $|BC| = 6$ oraz $\sin\sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Oblicz stosunek promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 57.

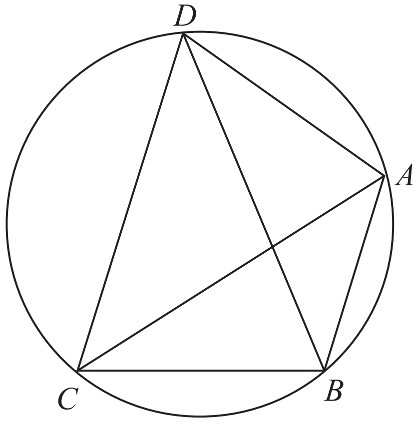
Rysunek przedstawia trapez równoramienny $ABCD$ opisany na okręgu o środku S i promieniu $r = \frac{\sqrt{91}}{2}$. Dolna podstawa trapezu jest o 6 dłuższa od górnej podstawy.



Oblicz obwód trapezu $ABCD$.

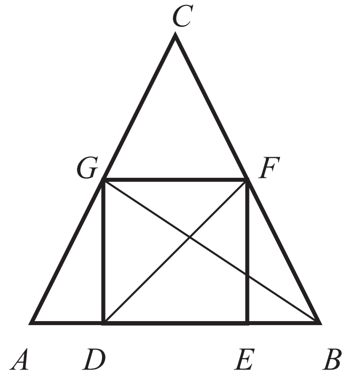
Zadanie 58.

Czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg S spełnia następujące warunki: $|BD| = |DC|$, $|AB| = 4$, $|AC| = 6$, $|AD| = 5$. Oblicz długość promienia okręgu S.



Zadanie 59.

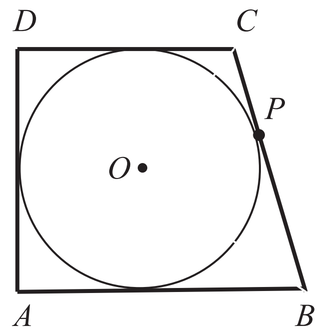
W trójkąt równoramienny ABC wpisano kwadrat w taki sposób, że bok DE kwadratu zawiera się w podstawie AB trójkąta, a wierzchołki F i G kwadratu leżą odpowiednio na ramionach BC i AC trójkąta (zobacz rysunek).



Pole trójkąta CFG jest równe sumie pól trójkątów ADG i BEF. Oblicz sinus kąta ostrego, pod jakim przecinają się odcinki DF i BG.

Zadanie 60.

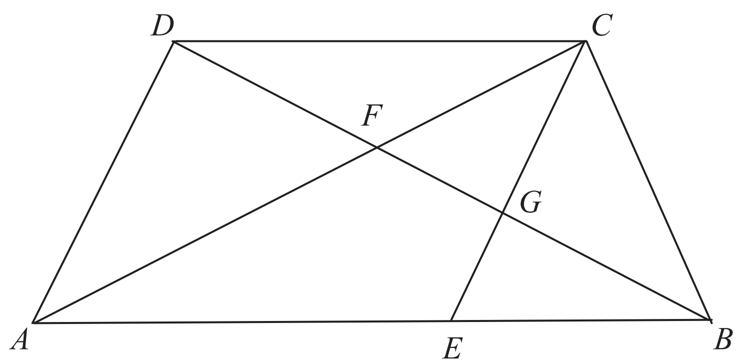
W trapez prostokątny $ABCD$ wpisano okrąg o środku O, który w punkcie P jest styczny do dłuższego ramienia BC tego trapezu (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli $|BP| = p$ i $|CP| = q$, to obwód trapezu jest równy $2\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2$.

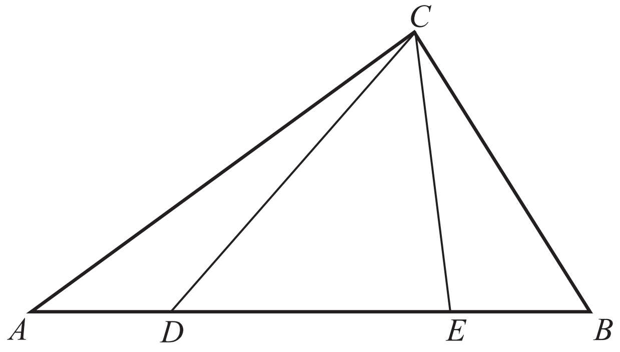
Zadanie 61.

Na podstawie AB trapezu $ABCD$ ($|AB| > |CD|$) wyznaczono taki punkt E, że czworokąt $AECD$ jest równoległobokiem. Przekątna BD przecina odcinki CA i CE odpowiednio w punktach F i G. Odcinki DG i BF są równej długości. Uzasadnij, że $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Zadanie 62.

Na boku AB trójkąta ABC obrano punkty D i E takie, że $|AD| = |EB| = \frac{1}{4}|AB|$ (zobacz rysunek).

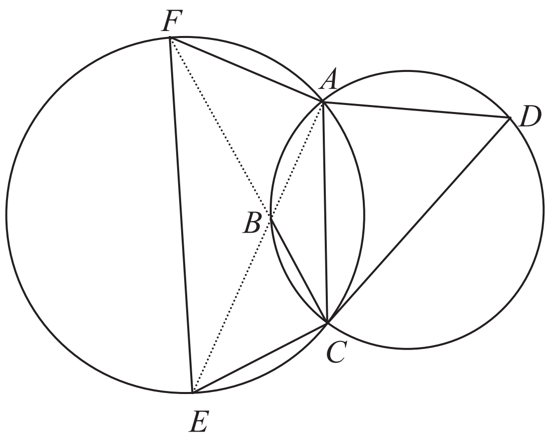


Udowodnij, że

$$|AC|^2 + 2|CE|^2 = |BC|^2 + 2|CD|^2 .$$

Zadanie 63.

Okrąg o_1 jest opisany na czworokącie $ABCD$, natomiast o_2 jest opisany na czworokącie $AFEC$ (zobacz rysunek). Punkty A, B, E są współliniowe i zachodzi równość $|\sphericalangle BFE| = |\sphericalangle CDB|$. Udowodnij, że punkty F, B, C są współliniowe.



Zadanie 64.

Zbadaj, czy punkt $(3,-1)$ leży na prostej przechodzącej przez punkt $(1,3)$ prostopadłej do prostej o równaniu $\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2} = 0$.

Zadanie 65.

Narysuj w układzie współrzędnych następujące zbiory: $(x+1)^2 + (y+1)^2 \le 25$ oraz $y \ge \frac{1}{7}x + 2\frac{5}{7}$ i oblicz pole figury F, która jest częścią wspólną narysowanych zbiorów.

Zadanie 66.

Okręgi o_1 i o_2 są dane, odpowiednio, równaniami $x^2+y^2=1$ oraz $(x-6)^2+(y-3)^2=5$. Środki tych okręgów połączono odcinkiem, który przecina okrąg o_1 w punkcie *A* oraz okrąg o_2 w punkcie *B*. Wyznacz współrzędne środka odcinka *AB*.

Zadanie 67.

Dany jest okrąg o równaniu $(x-5)^2+(y-3)^2=9$. Wyznacz równania stycznych do danego okręgu przechodzących przez początek układu współrzędnych.

Zadanie 68.

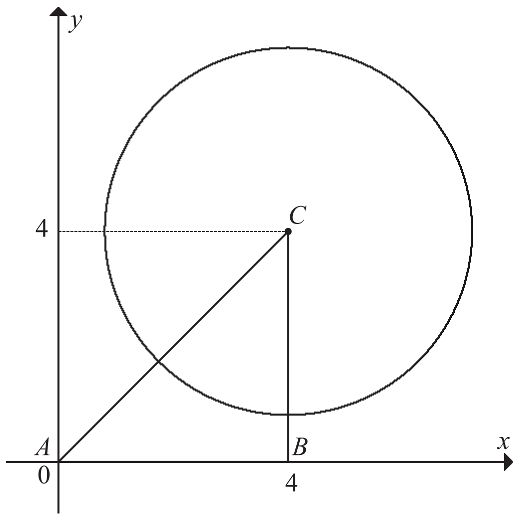
Dany jest okrąg O_1 o równaniu $(x-3)^2+y^2=36$ oraz okrąg O_2 o równaniu $x^2+(y-m)^2=m^2$. Dla jakich wartości parametru m okręgi O_1 i O_2 mają dokładnie jeden punkt wspólny? Dla znalezionych wartości parametru m wyznacz równanie prostej przechodzącej przez środki tych okręgów.

Zadanie 69.

Dany jest punkt $A=(0,0)$. Punkt *B*, różny od punktu *A*, należy do okręgu o równaniu $(x-2)^2+y^2=4$. Wykaż, że środek odcinka *AB* należy do okręgu o równaniu $(x-1)^2+y^2=1$.

Zadanie 70.

Na rysunku jest przedstawiony trójkąt prostokątny *ABC*, którego wierzchołkami są punkty $A=(0,0)$, $B=(4,0)$ i $C=(4,4)$, oraz okrąg o środku *C*, który dzieli trójkąt na dwie figury o równych polach.



Wyznacz równanie tego okręgu.

Zadanie 71.

Dany jest trójkąt prostokątny *KLM* o kącie prostym przy wierzchołku *K*, ograniczony prostymi *KL:* $2x+3y+5=0$, *LM:* $7x+4y-2=0$ oraz prostą *KM*. Wyznacz równanie prostej *KM*, wiedząc, że pole trójkąta *KLM* jest równe 13.

Zadanie 72.

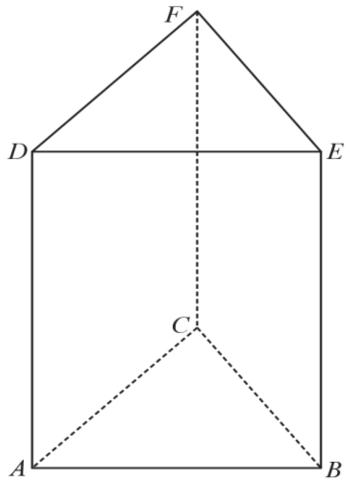
Dwa boki trójkąta o polu równym 20 zawierają się w prostych prostopadłych *k*: $ax+by-4a=0$ oraz *l*: $(2b-1)x-ay-8b+4=0$. Trzeci bok tego trójkąta zawiera się w osi *Oy*. Wyznacz wszystkie dodatnie wartości parametrów *a* i *b*, dla których spełnione są warunki zadania.

Zadanie 73.

Wykaż, że jeśli prosta o równaniu $y=kx+l$ jest styczna do okręgu o równaniu $(x-k)^2+(y-l)^2=m^2$, gdzie $k, l \in R$ oraz $m>0$, to $\frac{k^4}{k^2+1}=m^2$.

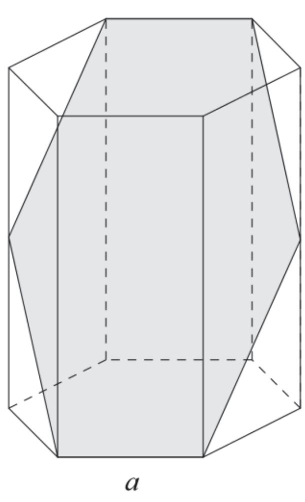
Zadanie 74.

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego *ABCDEF* (zobacz rysunek obok) jest równa 6. Punkt *K* dzieli krawędź boczną *CF* w stosunku 2:3. Pole przekroju tego graniastosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy *AB* i punkt *K* jest równe $15\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



Zadanie 75.

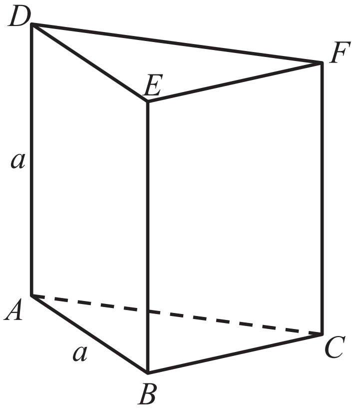
Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy równej 4. Graniastosłup przecięto płaszczyzną jak na rysunku. Otrzymano w ten sposób przekrój o polu równym $48\sqrt{2}$. Oblicz objętość danego graniastosłupa.



a

Zadanie 76.

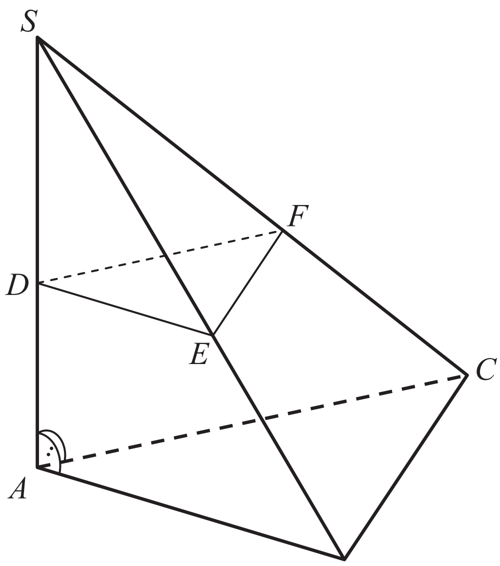
Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny *ABCDEF*, w którym każda krawędź ma tę samą długość równą *a* (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli przekrój tego graniastosłupa płaszczyzną zawierającą krawędź *AB* podstawy tego graniastosłupa jest trapezem, to płaszczyzna ta jest nachylona do płaszczyzny podstawy *ABC* graniastosłupa pod takim kątem α, że $\operatorname{tg}\alpha > \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Zadanie 77.

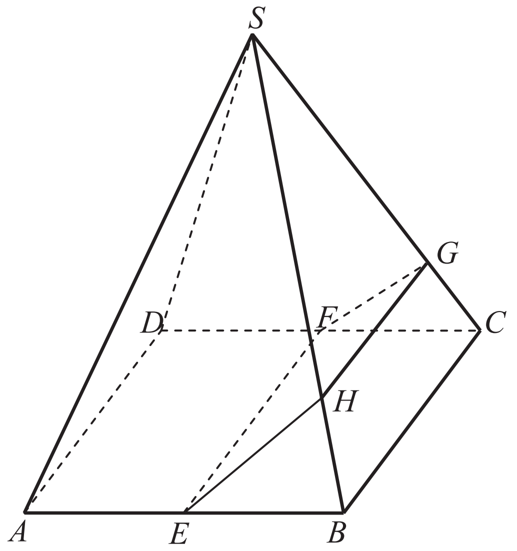
Dany jest ostrosłup trójkątny *ABCS*, w którym krawędź boczna *AS* jest jednocześnie wysokością ostrosłupa, a kąt między każdymi dwiema krawędziami bocznymi jest równy 60°. Przez punkt *D* leżący na krawędzi *AS* poprowadzono płaszczyznę równoległą do płaszczyzny podstawy *ABC*. Płaszczyzna ta przecięła krawędzie boczne *BS* i *CS* w punktach *E* i *F* (zobacz rysunek).



Pole trójkąta *ABC* jest równe P_1, a pole trójkąta *DEF* jest równe P_2. Oblicz odległość między płaszczyznami *ABC* i *DEF*.

Zadanie 78.

Punkt S jest wierzchołkiem ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, a punkty E, F są odpowiednio środkami krawędzi AB i CD jego podstawy. Krawędź podstawy i wysokość tego ostrosłupa mają taką samą długość równą 1. Płaszczyzna przechodząca przez punkty E i F przecina krawędzie boczne odpowiednio w punktach G oraz H (zobacz rysunek).



Oblicz pole otrzymanego przekroju, wiedząc, że jest ono dwa razy większe od pola czworokąta $BCGH$.

1.5. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka

Zadanie 79.

Zdarzenia losowe A, B, C zawarte w Ω są takie, że $C \subset A$, $P(C) > 0$ i $P(A' \cap B) > 0$. Wykaż, że $P(C \mid A) > P(C \mid A \cup B)$.

Komentarz do zadania

Zapisz odpowiednie prawdopodobieństwa warunkowe $P(C \mid A)$ i $P(C \mid A \cup B)$.

$$P(C \mid A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} \quad \text{oraz} \quad P(C \mid A \cup B) = \frac{P(C \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}.$$

Skorzystaj z założeń o zdarzeniach A, B, C.

Ponieważ $C \subset A$, to $C \subset (A \cup B)$ oraz $C \cap A = C \cap (A \cup B) = C$, czyli .

$$P(C \mid A) = \frac{P(C)}{P(A)} \text{ i } P(C \mid A \cup B) = \frac{P(C)}{P(A \cup B)}.$$